NP - COMPLETEZZA

18/12

DEF. $A \leq_m^P B$, se esiste $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, calcolabile in tempo polinomiale, t.c. $\forall w$

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

TEO Se $A \leq_m^P B$ e $B \in P$, allora $A \in P$.

Problema fondamentale in NP:

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle : \phi \text{ formula booleana soddisfacibile} \}.$$

$$\phi = (\bar{x} \land y) \lor (x \land \bar{z})$$

Soddisfacibile: $x = 0 = z$, $y = 1$.

Es. SAT $\in$ NP.

SAT $\in$ P? Come vedremo, SAT $\in$ P sse P = NP.

SAT ha varie forme. La più comune:

3SAT = $\{ \langle \phi \rangle : \phi$ 3CNF soddisfacibile $\}$

CNF: un AND di tante clausole. Ogni clausola è un OR con ≤ 3 letterali.

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_1)$$

FATTO. 2SAT $\in$ P.

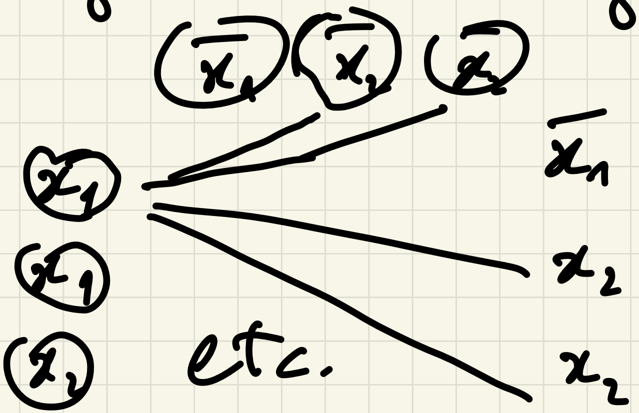
TEO. $3SAT \leq_m^p CLIQUE = \{ \langle G \rangle : G$ grafo con una clique $\}$

DIM. Devo costruire (in tempo polinomiale) una $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c.

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \text{ sse } f(\langle \phi \rangle) = \langle G \rangle \in CLIQUE$$

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

Devo generare grafo. I nodi del grafo sono organizzati in k gruppi di 3 nodi $t_1, \dots, t_k$



$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_2)$$

Archi: Metto tutti gli archi possibili tranne: No archi tra nodi stessa terna.
No archi tra x e $\bar{x}$.

($\Rightarrow$) Sia ϕ soddisfacibile. Dimostro che G ha k-clique. ϕ ha un assegnamento. Siccome 3CNF, tutte le clausole sono soddisfatte e quindi almeno un letterale per clausola è VERO. Per ogni tripla prendo un nodo corrispondente al letterale soddisfatto in quella tripla.
Vediamo che è una k-CLIQUE. Ci sono k nodi e tutti connessi perché appartengono a triple diverse.

L'unico caso in cui questa non è CLIQUE è che in una tripla ha preso x e in un'altra $\bar{x}$.
Ma questo non è possibile perché uno solo tra x e $\bar{x}$ può essere vero.

($\Leftarrow$) Supponiamo G abbia K-CLIQUE. Per costruzione la CLIQUE ha un nodo per tripla (perché no archi tra nodi stessa tripla).
Assegnamento: in modo che i nodi selezionati siano tutti veri. Ovvero se x (o $\bar{x}$) appartiene alla CLIQUE assegno $x = 1$ (o $x = 0$).
Nessuna contraddizione: $\nexists$ arco $x \rightsquigarrow \bar{x}$.
Chiaramente ϕ è soddisfatta da questo assegnamento #

DEF. B è NP-completo se: (i) $B \in NP$ e
(ii) $\forall A \in NP$, $A \leq_m^p B$.

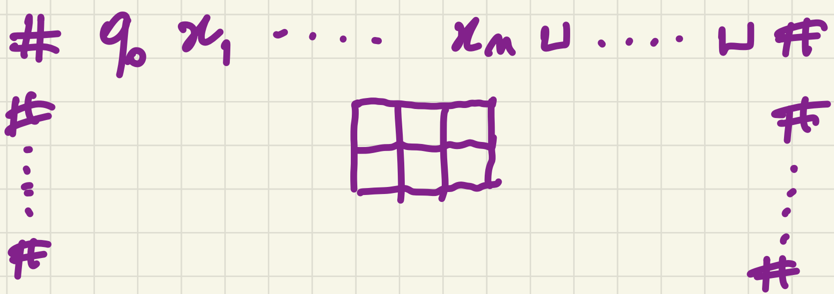
TEO. Se B è NP-completo e $B \in P$, allora $P = NP$.

TEO. Se B è NP-completo e $B \leq_m^p C$, allora C è NP-completo.

TEO SAT è NP-completo.

DIM. Ovviamente $SAT \in NP$. Devo dimostrare: $\forall A \in NP$, $A \leq_m^p SAT$. Devo costruire $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.c. $x \in A$ sse $f(x) \in SAT$.

Sia N una NTM che decide A in tempo n^k.



$n^k \times n^k$

Tableau di computazione di N: Tabella di dimensione $n^k \times n^k$ che contiene le configurazioni di N che computa su x (su x)

tableau accettante: contiene configurazione accettante. Stabilire se N accetta x è lo stesso di decidere se esiste tableau accettante.

Sia $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$. Per $i,j \in [n^k]$ e per ogni $s \in C$ definisco $x_{i,j,s}$ t.c.

$$x_{i,j,s} = 1 \quad \text{sse} \quad CELL(i,j) = s.$$

La formula:

$$\phi = \phi_{cell} \wedge \phi_{start} \wedge \phi_{move} \wedge \phi_{acc}$$

$$\phi_{start} = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge \dots$$
$$\dots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#}$$

$$\phi_{acc} = \bigvee_{i,j \in [n^k]} x_{i,j,q_{acc}}$$

$$\phi_{cell} = \bigwedge_{i,j} \left[\left(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} \overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}} \right) \right]$$

La prima parte dice che almeno una variabile associata ad una cella ha valore 1.
La seconda parte mi dice che non più di una variabile assume valore 1.
La formula ϕ_{move} garantisce che ogni riga deriva da quella precedente secondo le regole di N. Lo fa assicurando che ogni finestra 2x3 sia LECITA.

$$\phi_{move} = \bigwedge_{i,j} (\text{la finestra } (i,j) \text{ è legale})$$

$$= \bigwedge_{i,j} \left(\bigvee_{\substack{a_1,\dots,a_6 \\ \text{finestra} \\ \text{legale}}} x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6} \right)$$

Esempio:

$$\begin{array}{c} x\,q\,y\,y' \\ z\,q'\,y' \end{array} \qquad \delta(q,y) \ni (z,R,q')$$

Dimensione formula: # variabili $O(n^{2k})$
e anche la dimensione di ϕ_{move}, ϕ_{cell}, ϕ_{acc}
è $O(n^{2k})$

$|\phi|$ è polinomiale. ∎